© «Вестник ИГЭУ» Вып. 1 2010 г.

УДК 519.816

Функция выбора наилучшего решения при двух критериях

Тараканов Д.В., адъюнкт

Приведена функция выбора решений при двух критериях. На основе способа выявления количественной информации о предпочтениях человека в процессе выбора разработано решающее правило по принятию решения.

Ключевые слова: многокритериальная среда, треугольник выбора, функция выбора решений.

Function of the choice of the best decision under two criterions

Tarakanov Denis V., postgraduate student

The function of solutions choice depending on two criteria is given. Based on the method of detection of quantitative information about the preferences of people in the selection process is designed decision rule for decision.

Key words: multicriteria environment, selection triangle, function of solution.

В многокритериальной задаче, включающей конечное множество возможных решений и определенный на этом множестве набор критериев, состоящий из двух и более компонент, которые необходимо максимизировать, поиск решений необходимо производить в множестве Парето [2, 4].

Множество Парето содержит в себе такие решения, которые являются оптимальными по Парето. Оптимальность по Парето связана с геометрической интерпретацией «экономики чистого обмена», сформулированной в исследованиях английского экономиста Френсиса Эджворта в 1881 г., которая в дальнейшем получила название «ящик Эджворта». Рассуждения, которые использовались Френсисом Эджвортом для построения модели в случае двух критериев, связаны с данным понятием. Далее понятие оптимальности было введено для общего случая нескольких критериев в начале XX в. итальянским экономистом-социологом Вильфредо Парето [1]. Суть этого понятия проста: некоторый возможный вариант действий является эффективным (оптимальным по Парето), если при замене его любым другим вариантом нельзя добиться улучшения значения хотя бы одного из критериев, не ухудшив при этом значения какого-то другого [4]. В настоящее время принцип Эджворта-Парето является фундаментальным инструментом при решении задач многокритериального выбора [1].

Во многих практических задачах множество Парето содержит большое количество элементов, поэтому принять окончательное решение в таком случае достаточно проблематично с методической точки зрения. Ниже на основе методологических подходов к сужению множества Парето путем уменьшения количественной информации о предпочтениях лица, принимающего решение (ЛПР) [2], разработан вид функции полезности (выбора решений), позволяющей произвести окончательный выбор решения при двух критериях из множества Парето.

Математическая модель выбора решений при двух критериях. Рассмотрим классическую модель выбора решений $(X, f, \succ)$, включающую в себя три объекта: $X = \left(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\right)$ – множество возможных или допустимых решений; $f = (f_1, f_2)$ – числовая двухкритериальная векторная функция, определенная на множестве X; $\succ$ – отношение предпочтения ЛПР, определенное на множестве X. Выбор, осуществляемый ЛПР, одного из двух предлагаемых вариантов записывается следующим образом: $x^{(1)} \succ x^{(2)}$, что означает «решение $x^{(1)}$ предпочтительнее, чем $x^{(2)}$».

Задача выбора состоит в отыскании наилучших, относительно мнения ЛПР, решений, которые обозначим через Sel$X$ [2].

Специалисты в области принятия решений считают, что неизвестное множество Sel$X$ обязательно содержится в множестве Ndom$X$, т.е. справедливо включение

$$\text{Sel}X \subset \text{Ndom}X, \quad (1)$$

где $\text{Ndom}X = \left\{x^* \in X \;\middle|\; \text{не существует такого } x \in X \text{, что } x \succ x^*\right\}$ [2].

Введем в рассмотрение критериальное пространство R^m – m-мерное векторное пространство оценок решений по критериям, т.е. $f(X) \subset R^m$.. Отношение предпочтения $\succ$ индуцирует в R^m бинарное отношение $\succ_m$ по правилу

$$f\left(x^{(1)}\right) \succ_m f\left(x^{(2)}\right) \Rightarrow x^{(1)} \succ x^{(2)}. \quad (2)$$

Для того что бы выделить класс задач, в которых предлагаемая модель гарантирует получение обоснованного результата выбора решения, необходимо ввести аксиомы «разумного» поведения ЛПР в процессе выбора [2].

Аксиома 1 *(исключения)*. Решение, не выбираемое в какой-либо паре, не может быть выбрано и из исходного множества возможных решений, т.е. $x^{(1)}, x^{(2)} \in X$, $x^{(1)} \succ x^{(2)} \Rightarrow x^{(2)} \notin \mathrm{Sel}X$ [2].

Аксиома 2. Отношение $\succ_m$ определено на всем критериальном пространстве R^m и является транзитивным на нем [2].

Аксиома 3 *(аксиома согласования)*. Из двух решений, отличающихся одно от другого единственной оценкой по одному из критериев векторной функции, для ЛПР предпочтительнее решение, имеющее большее значение по данной оценке [2].

При соблюдении этих трех аксиом разумного поведения ЛПР выполняется главная аксиома выбора решений – аксиома Парето.

Аксиома Парето. Для любых $x, x' \in X$ выполняется $f(x) \geq f(x') \Rightarrow x \succ x'$. Знак $\geq$ означает, что имеют место нестрогие неравенства $f_i(x) \geq f_i(x'), i = 1,2,...,m$, причем $f_i(x) \neq f_i(x')$ [2].

Для того чтобы построить множество Парето, необходимо использовать алгоритмы перебора. Для двухкритериальной векторной функции построение множества Парето не составляет труда. Далее в рассуждениях все решения понимаются нами как Паретооптимальные.

Выявление предпочтений лиц принимающих решение. Выбрать одно наилучшее решение из множества Парето возможно только обладая дополнительной информацией о предпочтениях ЛПР. Данная информация есть проявление предпочтений человека при принятии решения, поэтому вполне обоснованно считать ее человеческим фактором в процессе принятия решения.

Итак, каким образом можно учесть данную информацию в процессе принятия решения? Ответ на данный вопрос можно найти в работах, посвященных сужению множества Парето при помощи набора количественной информации о важности одного критерия по отношению к другому [2]. Ниже рассмотрим данный подход к выяснению такой информации, используемый в классической постановке задачи сужения множества Парето.

Рассмотрим два произвольных решения $x^{(1)}, x^{(2)} \in X$. Если оценки этих решений совпадают, т.е. $f\left(x^{(1)}\right) = f\left(x^{(2)}\right)$, то решения $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ естественно считать равнозначными для ЛПР. Если же имеет место соотношение $f\left(x^{(1)}\right) \geq f\left(x^{(2)}\right)$ или $f\left(x^{(2)}\right) \geq f\left(x^{(1)}\right)$, то в силу аксиомы Парето верно $x^{(1)} \succ x^{(2)}$ или $x^{(2)} \succ x^{(1)}$ соответственно [2].

Рассмотрим случай, когда не выполняется ни одно из трех приведенных выше соотношений. В этом случае для двухкритериальной задачи возможны следующие варианты:

1) $$f_1\left(x^{(1)}\right) > f_1\left(x^{(2)}\right), \quad f_2\left(x^{(2)}\right) > f_2\left(x^{(1)}\right); \qquad (3)$$

2) $$f_1\left(x^{(2)}\right) > f_1\left(x^{(1)}\right), \quad f_2\left(x^{(1)}\right) > f_2\left(x^{(2)}\right). \qquad (4)$$

В силу симметричности, рассмотрим первый случай.

Предположим, что при выполнении соотношения (3) ЛПР из двух решений $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ отдает свое предпочтение первому, т.е. $x^{(1)} \succ x^{(2)}$. Возникает вопрос: существуют ли какие-то разумные причины, способные объяснить выбор, сделанный ЛПР?

Решение $x^{(1)}$ предпочтительнее $x^{(2)}$ по критерию f_1 векторной функции f, и в то же время оно менее предпочтительно, чем $x^{(2)}$ по критерию f_2. Эта ситуация может быть пояснена следующим образом. ЛПР выгодно получить «выигрыш» по критерию f_1 векторной функции f, несмотря на «проигрыш» по критерию f_2. Таким образом, первый критерий векторной функции важнее второго [2].

Определение 1. Говорят, что критерий f_i важнее критерия f_j с положительными параметрами w_i и w_j, если для $x^{(1)}, x^{(2)} \in X$ выполняется

$$f_i\left(x^{(1)}\right) > f_i\left(x^{(2)}\right),$$

$$f_j\left(x^{(2)}\right) > f_j\left(x^{(1)}\right)$$

вместе с

$$\begin{aligned} & f_i\left(x^{(1)}\right) - f_i\left(x^{(2)}\right) = \Delta f_i\left(x^{(1)}, x^{(2)}\right) > 0 \\ & \Rightarrow \Delta f_i\left(x^{(1)}, x^{(2)}\right) = w_i \text{-"выигрыш"}, \\ & f_j\left(x^{(1)}\right) - f_j\left(x^{(2)}\right) = \Delta f_j\left(x^{(1)}, x^{(2)}\right) < 0 \\ & \Rightarrow \left|\Delta f_j\left(x^{(1)}, x^{(2)}\right)\right| = w_j \text{ -"проигрыш"}, \end{aligned} \qquad (5)$$

что влечет $x^{(1)} \succ x^{(2)}$ [2].

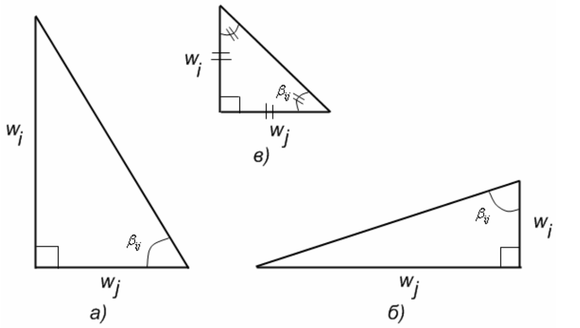
В работе [2] рассматривается ряд полезных свойств, которыми обладают величины «выигрыша» и «проигрыша» по критериям. Отметим лишь то, что если ЛПР готово пойти на «проигрыш» w_j по менее важному j-му критерию ради получения «выигрыша» в размере w_i по более важному i-му критерию, то это ЛПР, очевидно, должно согласиться как на меньший «проигрыш» w'_j ($w'_j < w_j$), так и на больший «выигрыш» w'_i ($w'_i > w_i$).

Осталось определить, каким образом использовать данную информацию в процессе выбора решений? Для этого предлагаем следующее правило выбора.

Правило выбора по острому углу прямоугольного треугольника выбора. Выяснив информацию о важности одного критерия векторной функции по отношению к другому, ЛПР необходимо выбрать правило, по которому будет производиться окончательный выбор из исходного множества альтернатив. Предлагаем ввести следующее понятия.

Определение 2. Прямоугольный треугольник, у которого одним из катетов выступает «выигрыш» w_i по более важному критерию векторной функции, а другим катетом «проигрыш» w_j по менее важному, будем называть *прямоугольным треугольником выбора.*

Определение 3. Не меньший из острых углов прямоугольного треугольника выбора будем называть *тригонометрическим коэффициентом важности i*-го критерия векторной функции по отношению к *j*-му (см. рисунок).



Прямоугольный треугольник выбора и положение на нем не меньшего из острых углов в случаях: *а* – $w_i > w_j$; *б* – $w_j > w_i$; *в* – $w_i = w_j$

Предположим, что *i*-й критерий векторной функции важнее *j*-го с параметрами w_i и w_j, тогда данный угол определяется следующим образом:

$$\beta_{ij} = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{w_i}{w_j}\right), \text{ если } w_i \geq w_j, \\ \operatorname{arctg}\left(\dfrac{w_j}{w_i}\right), \text{ если } w_j > w_i. \end{cases} \qquad (6)$$

Очевидно, что $\frac{\pi}{4} \leq \beta_{ij} < \frac{\pi}{2}$. В случае, когда любой угол из промежутка $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ является коэффициентом тригонометрической важности *i*-го критерия по сравнению с *j*, то будем считать, что *i*-й критерий несравнимо важнее *j*-го критерия. В таком случае решающее правило по *не меньшему из острых углов прямоугольного треугольника выбора* имеет непосредственное согласование с *лексикографическим отношением предпочтения* и по сути является одним из видов «искусственного» отношения предпочтения. Данное утверждение доказано в [2].

В качестве вида функции выбора предлагаем классическую функцию обобщенного критерия:

$$f^0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x), , \qquad (7)$$

где λ_i – «весовые» коэффициенты критериев, причем все $\lambda_i \geq 0$ и присутствует условие $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ [1].

С учетом этого должна быть введена еще одна аксиома «разумного» поведения, позволяющая ЛПР производить преобразования над критериями, составляющими векторную функцию.

Аксиома 4 (инвариантности отношения предпочтения). Отношение предпочтения $\succ_m$ является инвариантным относительно линейного положительного преобразования. Иными словами, для любой пары векторных оценок $f\left(x^{(1)}\right), f\left(x^{(1)}\right) \in R^m$, связанных соотношением $f\left(x^{(1)}\right) \succ_m f\left(x^{(2)}\right)$, должно выполняться как соотношение $\left(f\left(x^{(1)}\right) + c\right) \succ_m \left(f\left(x^{(2)}\right) + c\right)$ для любого вектора $c \in R^m$, так и соотношение $\alpha \cdot f\left(x^{(1)}\right) \succ_m \alpha \cdot f\left(x^{(2)}\right)$ для любого положительного α [2].

В нашем случае $m = 2$, тогда $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ да еще данные параметры должны зависеть от коэффициента тригонометрической важности одного критерия по сравнению с другим и не нарушать аксиому 4. Поэтому в качестве «весового» коэффициента при более важном критерии предлагаем использовать $\lambda_i = \operatorname{Sin}^2\left(\beta_{ij}\right)$, а в качестве коэффициента при менее важном критерии $\lambda_j = \operatorname{Cos}^2\left(\beta_{ij}\right)$, тогда все требования, предъявляемые к «обобщенному» критерию, в случае двухмерной задачи выбора будут выполняться. Выбранным следует считать решение, которое максимизирует функцию

$$\psi^0 = f_i \cdot \operatorname{Sin}^2\left(\beta_{ij}\right) + f_j \cdot \operatorname{Cos}^2\left(\beta_{ij}\right). \qquad (8)$$

Замечание 1. В случае, когда ЛПР заинтересовано в выборе одного решения, а данная функция предлагает для выбора несколько вариантов, окончательное решение должно максимизировать наиболее важный исходный критерий f_i векторной функции f согласно аксиоме 3 «разумного» поведения ЛПР.

Пример. Пусть перед ЛПР стоит задача выбора одного решения из семи $X = \left(x^{(1)}, ..., x^{(n)}\right), n = 7$, оцениваемым по двухкритериальной векторной функции $f = (f_1, f_2)$. Необходимо найти множество выбранных решений Sel(X), состоящее из одного решения.

Решения получили следующие оценки по векторной функции:

$x^{(1)} = (0,1;\ 0,9)$,

$x^{(2)} = (0,3;\ 0,7)$, $x^{(3)} = (0,4;\ 0,55)$,

$x^{(4)} = (0,5;\ 0,35)$, $x^{(5)} = (0,55;\ 0,3)$,

$x^{(6)} = (0,7;\ 0,25)$, $x^{(7)} = (0;\ 0,9)$.

Для данных решений строим множество Парето. Очевидно, что в это множество не входит решение $x^{(7)}$, так как оно *доминируется* решением $x^{(1)}$. Для наглядности рассмотрим два случая выявления предпочтений ЛПР.

Случай 1. Выясняем предпочтения ЛПР. Из пары решений $x^{(1)}$ и $x^{(4)}$ ЛПР выбрало решение $x^{(4)}$, тогда исключаем $x^{(1)}$ из дальнейшего расчета по аксиоме 1. Выясняем выигрыш и проигрыш по критериям:

$x^{(4)} - x^{(1)}$;

$\Delta f_1 = 0,5 - 0,1 = 0,4 > 0 \Rightarrow w_1 -$ "выигрыш";

$\Delta f_2 = 0,35 - 0,9 = -0,55 < 0 \Rightarrow w_2 -$ "проигрыш".

Так как ЛПР предпочло «выигрыш» по первому критерию двухкритериальной векторной функции по отношению к «проигрышу» по второму критерию, то первый критерий будет важнее второго с *коэффициентом тригонометрической важности*

$$\beta_{12} = \operatorname{arctg}\left(\frac{w_2}{w_1}\right) = \operatorname{arctg}(1,375) = 0,942.$$

Тогда функция выбора для данной задачи примет вид

$$\psi^0 = 0,65 \cdot f_1 + 0,35 \cdot f_2.$$

Определяем значения данной функции в каждой точке, характеризующей решения:

$\psi^0(x^{(2)}) = 0,438$,

$\psi^0(x^{(3)}) = 0,452$, $\psi^0(x^{(4)}) = 0,448$,

$\psi^0(x^{(5)}) = 0,464$, $\psi^0(x^{(6)}) = 0,544$.

Таким образом, максимальное значение функция принимает в решении $x^{(6)} = (0,7;\ 0,25)$.

Ответ: $\mathrm{Sel}X = \left\{x^{(6)}\right\}$.

Случай 2. Выясняем предпочтения ЛПР. Из пары решений $x^{(3)}$ и $x^{(6)}$ ЛПР выбрало решение $x^{(3)}$, тогда решение $x^{(6)}$ исключаем из дальнейшего расчета в силу аксиомы 1. Выясняем «выигрыш» и «проигрыш» по критериям:

$x^{(3)} - x^{(6)}$;

$\Delta f_1 = 0,4 - 0,7 = -0,3 < 0 \Rightarrow w_1 -$ "проигрыш";

$\Delta f_2 = 0,55 - 0,25 = 0,3 > 0 \Rightarrow w_2 -$ "выигрыш".

Так как ЛПР предпочло «выигрыш» по второму критерию двухмерной векторной функции по отношению к «проигрышу» по первому критерию, то второй критерий будет важнее первого с коэффициентом тригонометрической важности

$$\beta_{21} = \operatorname{arctg}\left(\frac{w_1}{w_2}\right) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Тогда функция выбора для данной задачи примет вид

$$\psi^0 = f_1 \cdot \mathrm{Cos}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + f_2 \cdot \mathrm{Sin}^2\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\psi^0 = 0,5 \cdot f_1 + 0,5 \cdot f_2.$$

Определяем значения данной функции в каждой точке, характеризующей решения:

$\psi^0(x^{(1)}) = 0,5$, $\psi^0(x^{(2)}) = 0,5$,

$\psi^0(x^{(3)}) = 0,475$, $\psi^0(x^{(4)}) = 0,425$,

$\psi^0(x^{(5)}) = 0,425$.

Таким образом, максимальные значения функции достигнуты в решениях $x^{(1)} = (0,1;\ 0,9)$ и $x^{(2)} = (0,3;\ 0,7)$, но в силу замечания 1 и требования аксиомы 3 оценка решения $x^{(1)}$ по более важному (второму) критерию превосходит оценку решения $x^{(2)}$ $(0,9 > 0,7)$ по этому же критерию. Следовательно, выбранным стоит считать решение $x^{(1)} = (0,1;\ 0,9)$. Ответ: $\mathrm{Sel}X = \left\{x^{(1)}\right\}$.

Заключение

На настоящем этапе развития теории принятия решений существует две основных стратегии принятия многокритериальных решений: стратегия исключения и стратегия компенсации [2]. Подход, который лег в основу разработанной функции принятия решений, интегрирует в себе обе стратегии, так как в процессе выбора происходит исключение доминируемых решений (см. пример), и функция содержит в себе компенсацию «потерь» по менее важному критерию «прибавкой» по более важному. Что касается места положения модели с использованием приведенной функции выбора решений в методической области многокритериальной оптимизации, то проведя анализ, можно сказать следующее. Методы принятия решений специалисты в области многокритериальной оптимизации разделяют на пять основных классов [1]:

1) методы сведения исходной многокритериальной задачи к однокритериальной;
2) методы, основанные на использовании «искусственных» отношений предпочтения;
3) методы, использующие свойства инвариантности отношений предпочтения;
4) человеко-машинные методы аппроксимации предпочтений ЛПР;
5) методы, основанные на построении и сужении множества Парето с помощью различного рода (количественной и качественной) дополнительной информации.

Предложенная модель в определенной степени объединяет в себе все пять методов. Сводит многокритериальную задачу к однокритериальной, используя функцию выбора тригонометрического вида. В случае, когда один из критериев несравнимо важнее по отношению к другому, модель имеет полную связь с лексикографическим отношением предпочтений ЛПР. Использует инвариантность относительно линейного преобразования как требование, оговоренное в аксиоме 4 «разумного» поведения ЛПР. Построение *прямоугольного треугольника выбора* и принятие решения *по правилу не меньшего из острых углов данного треугольника* является одним из простых способов аппроксимировать предпочтения ЛПР. Теоретической базой разработанной функции является способ сужения множества Парето на основе количественной информации о важности критериев, предложенный профессором В.Д. Ногиным [2]. Все выше причисленное позволяет использовать данную модель при решении широкого класса задач принятия решений при двух критериях.

Список литературы

1. Ногин В.Д., Волкова Н.А. Эволюция принципа Эджворта-Парето // Таврический вестник информатики и математики. – 2006. – № 1. – С. 23–33.

2. Ногин В.Д. Принятие решения в многокритериальной среде: количественный подход – М.: Физматлит, 2002.

3. Ногин В.Д. Проблема сужения множества Парето: подходы к решению // Искусственный интеллект и принятие решений. – 2008. – № 1. – С. 98–112.

4. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. 2-е изд., испр. и доп. – М.: Физматлит, 2007.

Тараканов Денис Вячеславович,
Академия Государственной противопожарной службы МЧС России,
адъюнкт кафедры пожарной тактики и службы,
e-mail: den-pgs@rambler.ru